

Berechnung der Fangspiegelgröße eines Newtonteleskops

Martin Möller – www.martin-moeller.com

Stand: 8. Februar 2011

In diesem Artikel wird die erforderliche Größe des Fangspiegels eines Newtonteleskops ermittelt. Ausgehend von der Darstellung des Strahlengangs werden die geometrischen Eigenschaften des Teleskops analysiert. Mit Hilfe von Berechnungen, die mit Schulmathematik nachvollzogen werden können, werden die nötigen Formeln hergeleitet. Eine Beispielrechnung, die die Anwendung der Formeln zeigt, schließt den Artikel ab.

1 Einleitung

Bei der Berechnung der korrekten Fangspiegelgröße eines Newtonteleskops scheint es einige Unklarheiten zu geben, was sich in langen Diskussionen und sich wiederholenden Anfragen in Internetforen niederschlägt. Weitere Publikationen enthalten widersprüchliche Angaben [1, 2, 3, 4]. Das ist Grund genug, einmal genauer hinzusehen und die nötigen Formeln möglichst exakt herzuleiten, was dieser Artikel leisten möchte.

Der Fangspiegel stellt ein Hindernis für die einfallenden Strahlen dar. Aus diesem Grund ist eine möglichst genaue Berechnung der Fangspiegelgröße zu empfehlen, um diesen so klein wie möglich zu halten.

2 Grundlagen

Anhand von Abbildung 1 sei zunächst kurz der Strahlengang eines Newtonteleskops rekapituliert. Wir betrachten zunächst zwei Strahlen, die von einem Stern, also praktisch aus dem Unendlichen, parallel zur Symmetrieachse des Hauptspiegels in die Öffnung des Teleskops fallen. Die Symmetrieachse des Hauptspiegels ist gleichzeitig die Symmetrieachse des Teleskoptubus und wird daher im Folgenden auch als *Hauptachse* bezeichnet. Die Strahlen werden fokussiert und treffen auf den Fangspiegel, der unter einem Winkel von 45° zur optischen Achse montiert ist. Es erfolgt eine Umlenkung des Strahlengangs um 90° , um die Strahlen der Beobachtung zugänglich zu machen. Die Strahlen treffen sich außerhalb des Teleskops im Fokus und bilden ein reelles Bild des Sterns. Dieses Zwischenbild

kann mit Hilfe eines Okulars betrachtet oder mit dem Sensor einer Kamera aufgezeichnet werden.

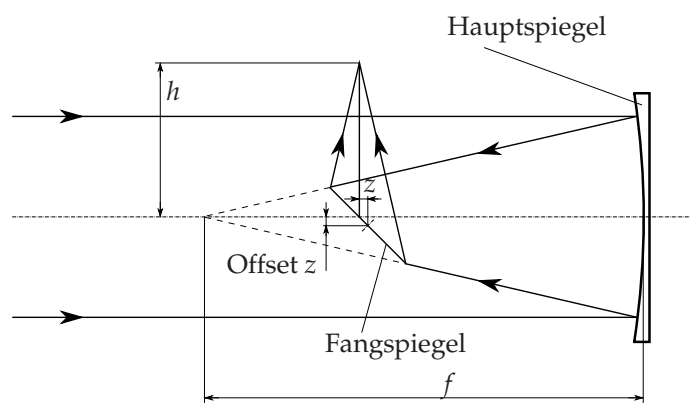


Abbildung 1 – Strahlengang in einem Newton-Teleskop mit charakteristischen Größen

Um herauszufinden, wie groß der Fangspiegel sein muss, betrachten wir nur die äußersten Strahlen, denn diese Randstrahlen müssen gerade noch den Fangspiegel treffen, um ins Okular zu gelangen. Die zusammenlaufenden Strahlen bilden ohne Reflexion am Fangspiegel einen Kegel und der Fangspiegel selbst stellt einen Kegelschnitt dar. Der Winkel zwischen Fangspiegel und Hauptachse ist größer als der halbe Öffnungswinkel des Kegels; deshalb hat der Fangspiegel die Form einer Ellipse.

Offset. Es fällt auf, dass die Symmetrielinie der einfallenden Strahlen nicht mit der Mitte des Fangspiegels zusammenfällt. Stattdessen befindet sich das größere Seg-

ment des Fangspiegels auf der dem Okular abgewandten Seite, in Abbildung 1 also unterhalb der Symmetrielinie. Das hängt damit zusammen, dass sich die eine Hälfte aufgrund der Neigung näher an der Spitze des Kegels befindet.

Das Zentrum des Fangspiegels ist in Abbildung 1 mit einer kurzen Symmetrielinie markiert. Es ist gegenüber der Hauptachse um den Abstand z verschoben. Dieser Abstand wird *Offset* genannt. Der Abstand z findet sich auch zwischen der Symmetrielinie des umgelenkten Strahlengangs und dem Zentrum des Hauptspiegels. In der Ebene des Fangspiegels ergibt sich eine Verschiebung um $\sqrt{2} z$ (Satz des Pythagoras).

Die parallel einfallenden Strahlen werden im Abstand der Brennweite f vom Hauptspiegel fokussiert. Nach der Umlenkung am Fangspiegel befindet sich der Fokus im Abstand h von der Symmetrieachse des Hauptspiegels, vgl. Abb. 1.

3 Herleitung

Wir betrachten nun die erweiterte Darstellung des Strahlengangs in Abbildung 2. Der Einfachheit halber ist die Richtungsänderung am Umlenkspiegel nicht mehr dargestellt. Zusätzlich zu den beiden gerade einfallenden Strahlen ist nun ein schräg einfallendes Strahlenbündel in Grün eingezeichnet und eines in Blau. Diese stammen beispielsweise von je einem Stern, der nicht mittig im Bildfeld liegt. Die einfallenden, grünen Strahlen sind um den Winkel $\frac{\delta}{2}$ gegenüber der Hauptachse des Teleskops gekippt, gleiches gilt für den blauen Strahlengang. Das führt zu einem

ausgedehnten Bildfeld mit dem Durchmesser b . Das ist der Durchmesser der Feldblende des Okulars.

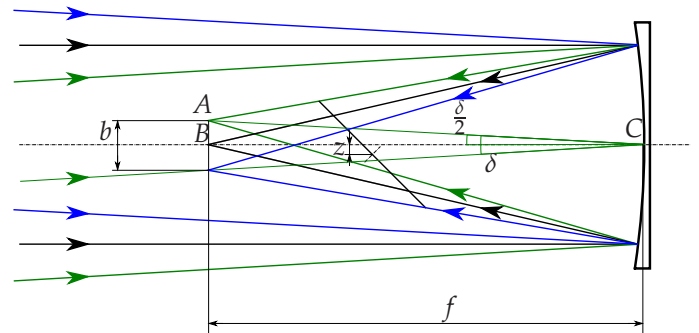


Abbildung 2 – Strahlengang im Newton-Teleskop mit schräg einfallenden Strahlen und ohne Umlenkung am Fangspiegel

Der unterhalb der Hauptachse einfallende, dünn dargestellte, grüne Strahl trifft den Hauptspiegel genau in der Mitte (Punkt C) und wird so reflektiert, dass er durch Punkt A verläuft. In Punkt C steht der Spiegel genau senkrecht zur Hauptachse. Demzufolge wird ein Strahl an diesem einen Punkt wie an einem Planspiegel abgelenkt, und zwar nach dem Grundsatz *Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel*. Einfallswinkel und Ausfallswinkel betragen hier gerade $\frac{\delta}{2}$.¹

Aus der Betrachtung des Dreiecks ΔABC können wir als erstes Ergebnis das Bildfeld des Teleskops bestimmen. Dabei verwenden wir zwei Seiten des Dreiecks mit folgenden Längen: $\overline{AB} = \frac{b}{2}$ sowie $\overline{BC} = f$. Es gilt:

$$\tan\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{\frac{b}{2}}{f} \Rightarrow \delta = 2 \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{d}{2f}\right)$$

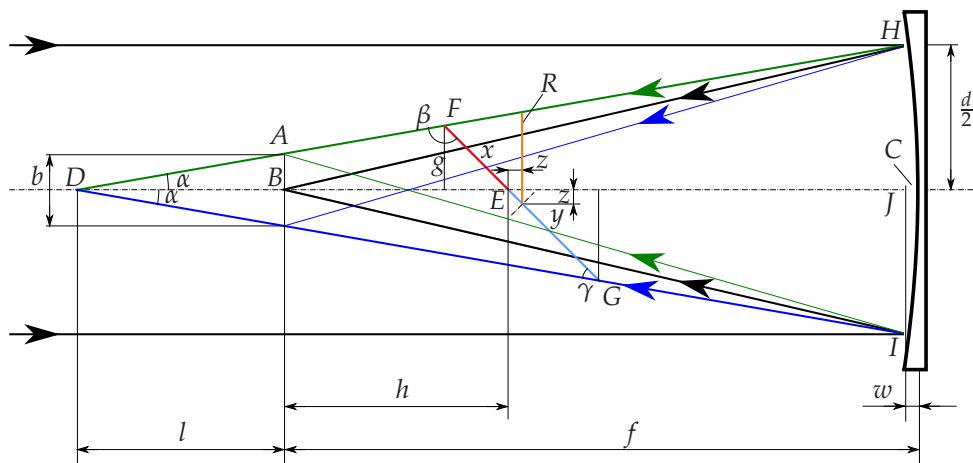


Abbildung 3 – Strahlengang im Newton-Teleskop ohne Umlenkung am Fangspiegel

¹In der Realität wird dieser Strahl zwar durch den Fangspiegel abgeschattet, was für diese Herleitung aber keine Rolle spielt.

Abbildung 3, die ab jetzt zur weiteren Herleitung verwendet wird, geht aus Abbildung 2 hervor. Dabei wurden die schräg einfallenden Strahlen vor dem Auftreffen auf den Hauptspiegel weggelassen. Die äußeren reflektierten Strahlen wurden bis zu ihrem Schnittpunkt verlängert. Sie bilden nun einen Kegel bzw. in der Projektion ein gleichschenkeliges Dreieck mit Spitze in Punkt D. Der halbe Öffnungswinkel dieses Dreiecks ist α . Dieses Dreieck hat keine physikalische Bedeutung und wird nur für die Herleitung benötigt.

Den Abstand \overline{BD} bezeichnen wir mit l . Der Anteil des Fangspiegels über der Hauptachse wird mit x bezeichnet und ist rot dargestellt, der Anteil unter der Hauptachse ist y und hellblau gezeichnet. Außerdem kennzeichnet β den Winkel zwischen Fangspiegel und Randstrahl bei Punkt F und γ diesen Winkel bei Punkt G.

Die Länge w ist die Pfeilhöhe des Hohlspiegels, also die Tiefe der Fläche an ihrem Mittelpunkt gegenüber dem Rand. Über den Satz des Pythagoras kann diese bestimmt werden, siehe Abbildung 4. Es gilt: $(r - w)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = r^2$ mit r als Krümmungsradius des Hohlspiegels. Außerdem gilt als Zusammenhang zwischen Radius und Brennweite $r = 2f$.

$$\Rightarrow w = 2f - \sqrt{4f^2 - \frac{d^2}{4}}$$

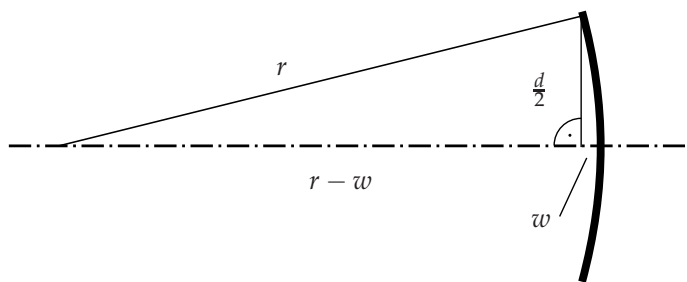


Abbildung 4 – Zur Bestimmung der Pfeilhöhe eines sphärischen Hohlspiegels

Aus der Betrachtung der Dreiecke $\triangle ABD$ und $\triangle DCH$ (Abbildung 3) lässt sich mit Hilfe des Strahlensatzes schließen:

$$\frac{b/2}{l} = \frac{d/2}{l + f - w}$$

Daraus folgt:

$$l = \frac{fb}{d - b}$$

Als Abkürzung definieren wir $f_2 := f + l - w$

Aus Dreieck $\triangle JDH$ ergibt sich:

$$\tan(\alpha) = \frac{d/2}{f_2} \Leftrightarrow \alpha = \operatorname{atan}\left(\frac{d}{2f_2}\right)$$

Mit Hilfe der Winkelsumme von 180° in Dreieck $\triangle DEF$ gelangen wir zu einem Ausdruck für β .

$$\beta = 180^\circ - 45^\circ - \alpha = 135^\circ - \operatorname{atan}\left(\frac{d}{2f_2}\right)$$

Wir nutzen den Sinussatz im gleichen Dreieck und gelangen zu einem Ausdruck für die Länge des Fangspiegels über der Hauptachse:

$$\frac{x}{\sin \alpha} = \frac{l + h}{\sin \beta}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x &= (l + h) \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \\ &= (l + h) \frac{\sin\left(\operatorname{atan}\left(\frac{d}{2f_2}\right)\right)}{\sin\left(135^\circ - \operatorname{atan}\left(\frac{d}{2f_2}\right)\right)} \end{aligned}$$

Analog gilt für $\triangle DEG$:

$$\gamma = 180^\circ - 135^\circ - \alpha = 45^\circ - \operatorname{atan}\left(\frac{d}{2f_2}\right)$$

Sinussatz für $\triangle DEG$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow y &= (l + h) \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \\ &= (l + h) \frac{\sin\left(\operatorname{atan}\left(\frac{d}{2f_2}\right)\right)}{\sin\left(45^\circ - \operatorname{atan}\left(\frac{d}{2f_2}\right)\right)} \end{aligned}$$

Mit Hilfe der hergeleiteten Strecken x und y kann die längere Halbachse des Fangspiegels $c = \frac{FG}{2}$ bestimmt werden:

$$\begin{aligned} c &= \frac{x + y}{2} = \frac{1}{2}(h + l) \sin\left(\operatorname{atan}\left(\frac{d}{2f_2}\right)\right) \\ &\cdot \left(\frac{1}{\sin\left(45^\circ - \operatorname{atan}\left(\frac{d}{2f_2}\right)\right)} + \frac{1}{\sin\left(135^\circ - \operatorname{atan}\left(\frac{d}{2f_2}\right)\right)} \right) \end{aligned}$$

Der Offset des Fangspiegels bestimmt sich zu

$$\begin{aligned} z &= \frac{y - c}{\sqrt{2}} = \frac{h + l}{2\sqrt{2}} \sin\left(\operatorname{atan}\left(\frac{d}{2f_2}\right)\right) \\ &\cdot \left(\frac{1}{\sin\left(45^\circ - \operatorname{atan}\left(\frac{d}{2f_2}\right)\right)} - \frac{1}{\sin\left(135^\circ - \operatorname{atan}\left(\frac{d}{2f_2}\right)\right)} \right) \end{aligned}$$

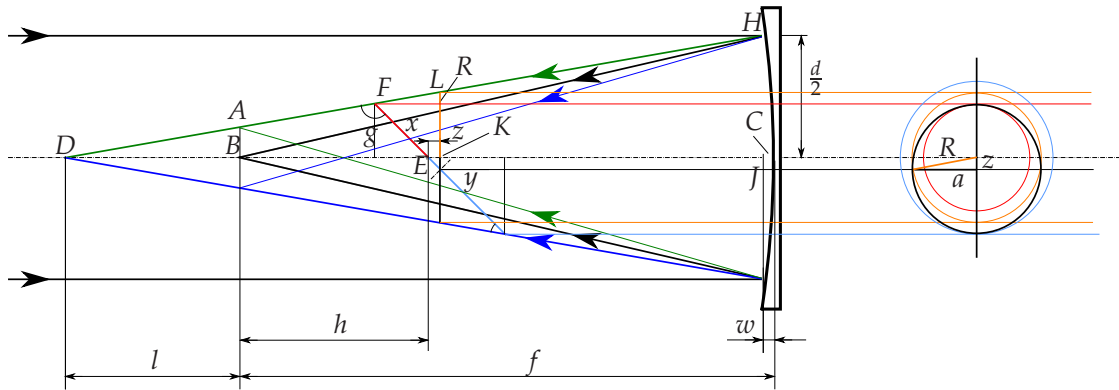


Abbildung 5 – Schematischer Strahlengang mit Projektion des Fangspiegels, wie dieser beim Einblick in den Tubus zu sehen wäre

Abbildung 5 zeigt zusätzlich zum Strahlengang eine Projektion des Fangspiegels, wie sie beim Blick in den Tubus aus der Richtung des einfallenden Lichts zu sehen wäre. Der Fangspiegel ist schwarz dargestellt. Außerdem sind die Kreise eingezeichnet, die den Durchmesser und die Lage des Fangspiegels definieren. Sie stellen Schnitte senkrecht zur Hauptachse durch den Tubus dar. Der hellblaue Kreis verläuft durch den unteren, dem Hauptspiegel am nächsten stehenden Punkt des Fangspiegels. Der rote Kreis ergibt den höchsten und am weitesten vom Fangspiegel entfernten Punkt. Der orange Kreis ist ein Schnitt durch den Tubus in der Höhe, in der die Mitte des Fangspiegels liegt. Er hat den Radius R . In der Projektion wird noch einmal der Offset des Fangspiegels z deutlich.

Der Radius R des Tubus lässt sich mit dem Strahlensatz aus den Dreieck $\triangle DLK$ und $\triangle DJH$ herleiten:

$$\frac{R}{l+h+z} = \frac{d/2}{f_2}$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{d(l+h+z)}{2f_2}$$

Mit dem Satz des Pythagoras ergibt sich damit aus der Projektion in Abbildung 5 die kleinere Halbachse des Fangspiegels a zu

$$a = \sqrt{R^2 - z^2}$$

4 Beispielrechnung

Um die hergeleiteten Formeln anzuwenden, führen wir eine Beispielrechnung durch. Als Testobjekt dient ein kleiner Selbstbau-Newton. Für dieses Teleskop gelten folgende Werte: $d = 70 \text{ mm}$, $f = 450 \text{ mm}$. Außerdem sei ein Bildfeld mit dem Durchmesser $b = 30 \text{ mm}$ in einem Abstand von $h = 60 \text{ mm}$ von der Hauptachse des Tubus zu erreichen.

Die Pfeilhöhe des Spiegels beträgt

$$w = 2f - \sqrt{4f^2 - \frac{d^2}{4}} = 0,500 \text{ mm.}$$

Als Zwischenergebnis berechnen wir

$$l = \frac{(f-w)b}{d-b} = 449,5 \text{ mm}$$

und

$$f_2 = f + l - w = 899,0 \text{ mm.}$$

Damit ergibt sich das Gesichtsfeld des Teleskops zu

$$\alpha = \text{atan}\left(\frac{d}{2f_2}\right) = 1,911^\circ.$$

Der Teil des Fangspiegels über der Hauptachse hat die Länge

$$x = (l+h) \frac{\sin\left(\text{atan}\left(\frac{d}{2f_2}\right)\right)}{\sin\left(135^\circ - \text{atan}\left(\frac{d}{2f_2}\right)\right)} = 23,27 \text{ mm}$$

und der darunterliegende

$$y = (l+h) \frac{\sin\left(\text{atan}\left(\frac{d}{2f_2}\right)\right)}{\sin\left(45^\circ - \text{atan}\left(\frac{d}{2f_2}\right)\right)} = 24,87 \text{ mm.}$$

Damit ergibt sich die längere Halbachse des elliptischen Fangspiegels zu

$$c = \frac{x+y}{2} = 24,07 \text{ mm.}$$

Der Offset beträgt

$$z = \frac{y-c}{\sqrt{2}} = 0,5680 \text{ mm.}$$

Als weitere Zwischengröße ist zu berechnen:

$$R = \frac{d(l+h+z)}{2f_2} = 17,02 \text{ mm}$$

Schließlich ergibt sich die kürzere Halbachse des Fangspiegels zu

$$a = \sqrt{R^2 - z^2} = 17,012 \text{ mm.}$$

Die errechneten Werte können mit Hilfe einer maßstäblichen Zeichnung verifiziert werden.

5 Fazit

Die hergeleiteten Formeln ermöglichen die Berechnung der Fangspiegelgröße auf möglichst exakte Art und Weise. So ist sichergestellt, dass der Fangspiegel beim Teleskopbau nicht zu groß ausgewählt wird und so unnötigerweise Strahlen auf dem Weg zum Hauptspiegel abschattet und dadurch den Kontrast des Teleskops mindert. Ein Vergleich mit anderen Berechnungsmethoden, wie sie auf der Internetseite [1] aufgelistet werden, ergibt eine gute Übereinstimmung mit den Formeln nach Dakin, Schön, Edberg sowie Peters/Pikes, jedoch Abweichungen zu den Werten nach Berry sowie Trittelvitz.

Literatur

- [1] OTTERSTEDT, Heiner: *Wie berechnet man die Größe des Fangspiegels*. <http://www.otterstedt.de/...>, 2003
- [2] STRICKLING, Wolfgang: *Justierung von Newton-Teleskopen*. <http://www.strickling.net/newtonj.htm>, 2003
- [3] SUITER, Harold R.: *Star testing astronomical telescopes*. 3. Aufl. Richmond (VA) : Willmann-Bell, 1999. – ISBN 0-943396-44-1
- [4] TRITTELVITZ, Martin: *Spiegelfernrohre – selbst gebaut*. 1. Aufl. (korr. Nachdruck). Heidelberg : Spektrum Akademischer Verlag, 2001. – ISBN 978-3-8274-1310-9